Сборник задач и их решений по предмету "Линейная алгебра", 1 поток, 2 семестр

Над этим дерьмом трудились
Денисов Егор, Долгушев Глеб, Курбацкий Вячеслав из 201 группы

Когда-то в 2024 году...

Содержание

Линейные операторы и жорданки

Задача 1:

Докажите, что линейная операция линейных операторов является линейным оператором.

__Решение:__
Пусть $A, B : V \to W$ - линейные операторы над полем $\mathbb{P}$, а $C = \alpha A + \beta B$ - их линейная комбинация.
Тогда $\forall x, y \in V$ и $\forall \delta, \gamma \in \mathbb{P}$: $C(\delta x + \gamma y) = (\alpha A + \beta B)(\delta x + \gamma y) = \alpha A(\delta x + \gamma y) + \beta B(\delta x + \gamma y) = \alpha(\delta Ax + \gamma Ay) + \beta(\delta Bx + \gamma By) = \delta(\alpha Ax + \beta Bx) + \gamma(\alpha Ay + \beta By) = \delta(\alpha A + \beta B)x + \gamma(\alpha A + \beta B)y = \delta Cx + \gamma Cy$
■

Задача 2:

Докажите, что произведение линейных операторов является линейным оператором.

__Решение:__
Пусть $A : V \to W$ и $B : W \to U$ - линейные операторы над полем $\mathbb{P}$, а $C = B \circ A$ - их произведение.
Тогда $\forall x, y \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$: $C(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha Cx + \beta Cy$
■

Задача 3:

Докажите, что если линейный оператор обратим, то обратный оператор определен однозначно и является линейным.

__Решение:__
1. Единственность:
Пусть $A : V \to W$ - обратимый линейный оператор над полем $\mathbb{P}$, а B и C - его обратные операторы.
Тогда $\forall x \in W : Bx = B(AC)x = (BA)Cx = Cx \Rightarrow B = C$

2. Линейность:
Пусть $A : V \to W$ - обратимый линейный оператор над полем $\mathbb{P}$, а B - его обратный оператор.

$\forall y_1, y_2 \in W$ имеют вид $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2, x_1, x_2 \in V \Rightarrow x_1 = By_1, x_2 = By_2$
Тогда $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(AB)y_1 + \beta(AB)y_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \Rightarrow B(\alpha y_1 + \beta y_2) =$ (так как B - обратный, то из $Ax = y$ следует $By = x$) $= \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha By_1 + \beta By_2$
■

Задача 4:

Пусть V и W - конечномерные пространства над общим полем. Докажите, что для обратимости линейного оператора $A : V \to W$ необходимо и достаточно выполнение условий $dimV = dimW$ и $kerA = \{0\}$

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Пусть $A : V \to W$ - обратимый линейный оператор над полем $\mathbb{P}$ и B - его обратный оператор.
Если $kerA \neq \{0\}$, то $\exists x \neq 0 : Ax = 0 \Rightarrow x = B(Ax) = B0 = 0 \Rightarrow x = 0$ - противоречие.
Так как $AV = W$, то $dimW \leq dimV$. Поясним этот момент - пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - базис V. Тогда $\forall y \in W : y = Ax = A(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) = \alpha_1(Ax_1) + ... + \alpha_n(Ax_n)$. То есть все векторы из W выражаются через векторы $Ax_1, ..., Ax_n$. Значит в базисе W векторов не больше, чем n. Аналогично $BW = V \Rightarrow dimV \leq dimW$. Значит $dimV = dimW$.

2. $\Leftarrow$:
Пусть $dimV = dimW = n$ и $kerA = \{0\}$. Тогда по теореме о ранге и дефекте - $rankA = n$. Так как $imA \subseteq W$ и $dim(imA) = dimW$, то $imA = W \Rightarrow A$ - сюръективный.
Так как $kerA = \{0\}$, то A - инъективный (иначе, если $\exists x_1 \neq x_2 : Ax_1 = Ax_2$, то $A(x_1 - x_2) = Ax_3 = 0$, где $x_3 \neq 0 \Rightarrow kerA \neq \{0\}$ - противоречие).
То есть $\forall y \in W \ \exists! x \in V : Ax = y \Rightarrow$ построим оператор $B : W \to V$ таким образом: $By = x$, где x - такой, что $Ax = y$. Построенный оператор B по определению - обратный для A (так как $(AB)y = y$ и $(BA)x = x \forall x \in V, y \in W$).
■

Задача 5:

Докажите, что ядро и образ линейного оператора являются его инвариантными подпространствами.

Решение:

Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{P}$.
$\forall x \in kerA : Ax = 0 \in kerA \Rightarrow kerA$ - инвариантное подпространство.
$\forall y \in imA : Ay \in imA$ по определению образа $\Rightarrow imA$ - инвариантное подпространство.
■

Задача 6:

Докажите, что сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности его области определения.

__**Решение:**__
Пусть $A : V \to W$ - линейный оператор над полем $\mathbb{P}$.
Пусть $defA = d$ и $v_1, ..., v_d$ - базис $kerA$. Дополним его до базиса всего пространства V векторами $v_{d+1}, ..., v_n$.
Тогда $\forall x \in V : x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n \Rightarrow Ax = A(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Av_1 + ... + \alpha_d Av_d + \alpha_{d+1} Av_{d+1} + ... + \alpha_n Av_n = \alpha_{d+1} Av_{d+1} + ... + \alpha_n Av_n$ (так как $Av_1 = ... = Av_d = 0$)
Таким образом, $imA = L(Av_{d+1}, ..., Av_n)$. Докажем, что эти векторы линейно независимы:
Пусть $\alpha_{d+1} Av_{d+1} + ... + \alpha_n Av_n = 0 \Rightarrow A(\alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) = 0 \Rightarrow \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n \in kerA \Rightarrow \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d \Rightarrow \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d - \alpha_{d+1} v_{d+1} - ... - \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_{d+1} = ... = \alpha_n = 0$ (так как $v_1, ..., v_n$ - линейно независимы). То есть из $\alpha_{d+1} Av_{d+1} + ... + \alpha_n Av_n = 0$ следует $\alpha_{d+1} = ... = \alpha_n = 0 \Rightarrow Av_{d+1}, ..., Av_n$ - линейно независимые $\Rightarrow rankA = n - d \Rightarrow rankA + defA = dimV$.
■

Задача 7:

Докажите, что если сумма ядер двух линейных операторов, действующих на одном пространстве, совпадает с этим пространством, то образ суммы этих операторов равен сумме их образов.

__**Решение:**__
Пусть $A, B : V \to V$ - линейные операторы над полем $\mathbb{P}$ и $kerA + kerB = V$.
Пусть $x \in im(A + B) \Rightarrow \exists y \in V : (A + B)y = x \Rightarrow Ay + By = x \Rightarrow x \in imA + imB \Rightarrow im(A + B) \subseteq imA + imB$.
Пусть $x \in imA + imB \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in V : x = Ay_1 + By_2$. Так как $kerA + kerB = V$, то $y_1 = u_1 + v_1, y_2 = u_2 + v_2$, где $u_1, u_2 \in kerA; v_1, v_2 \in kerB$. Значит $x = A(u_1 + v_1) + B(u_2 + v_2) = Av_1 + Bu_2 = Av_1 + 0 + Bu_2 + 0 = Av_1 + Au_2 + Bu_2 + Bv_1 =$

$(A+B)(v_1+u_2) \Rightarrow x \in im(A+B) \Rightarrow imA + imB \subseteq im(A+B)$.
То есть $im(A+B) = imA + imB$.
■

Задача 8:

Линейный оператор $A : V \to V$ удовлетворяет равенству $A^m = 0$. Докажите, что оператор $I - A$ обратим.

Решение:
Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{P}$ и $A^m = 0$.
Тогда $(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{m-1}) = (I + A + A^2 + ... + A^{m-1})(I - A) = I - A^m = I \Rightarrow I - A$ - обратим.
■

Задача 9:

Линейные операторы A и B таковы, что оператор $A+B$ - обратимый. Докажите, что операторы $P = (A+B)^{-1}A$ и $Q = (A+B)^{-1}B$ коммутируют.

Решение:
Заметим, что $P + Q = (A+B)^{-1}(A+B) = I \Rightarrow P = I - Q$.
Тогда $PQ = (I - Q)Q = Q - Q^2 = Q(I - Q) = QP$.
■

Задача 10:

Докажите, что для того, чтобы линейный оператор $P : V \to V$ был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы $P^2 = P$.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Пусть $V = L \oplus M$ и P - оператор проектирования на L параллельно M, то есть $\forall x \in V : x = u + v; u \in L, v \in M$ имеем $Px = u$.
Тогда $\forall x \in V : x = u+v$ выполняется $P^2x = P(Px) = P(u) = u = Px \Rightarrow P^2 = P$.

2. $\Leftarrow$:

Пусть $P^2 = P$. Тогда $V = L \oplus M, L = imP, M = kerP$. Докажем это:

- По теореме о ранге и дефекте знаем, что $dim(imP)+dim(kerP) = rankP+defP = dimV$

- Если $x \in kerP \cap imP$, то $Px = 0$ и $x = Py \Rightarrow Px = P^2y = Py = x = 0 \Rightarrow kerP \cap imP = \{0\}$

- Тогда, если $x_1, ..., x_d$ - базис $kerP$, а $x_{d+1}, ..., x_n$ - базис imP, то $x_1, ..., x_n$ все вместе линейно независимы (так как если $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$, то $\alpha_1 x_1 + ... \alpha_d x_d = -\alpha_{d+1} x_{d+1} - ... - \alpha_n x_n$ и $\alpha_1 x_1 + ... \alpha_d x_d \in kerP$, а $-\alpha_{d+1} x_{d+1} - ... - \alpha_n x_n \in imP \Rightarrow \alpha_1 x_1 + ... \alpha_d x_d = -\alpha_{d+1} x_{d+1} - ... - \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$). То есть $x_1, ..., x_n$ - базис V (так как это система линейно независимых векторов из V, число векторов в которой равно размерности V) $\Rightarrow \forall x \in V \exists!\ u \in kerP, v \in imP : x = u + v$ (если $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, то $u = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_d x_d, v = \alpha_{d+1} x_{d+1} + ... + \alpha_n x_n$)

Таким образом, $V = L \oplus M$ и P - оператор проектирования на L параллельно M, так как $\forall x \in V : x = u + v; u \in kerP, v \in imP$ имеем $Px = Pu + Pv = Pv \in imP$.
■

Задача 11:

Докажите, что для того чтобы матрицы одинаковых размеров были матрицами одного и того же линейного оператора в каких-то парах базисов, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый ранг.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Пусть $A : V \to W$ - линейный оператор и $[A]_{fe}, [A]_{hg}$ - его матрицы парах базисов $e, g \in V; f, h \in W$
Тогда $\forall x \in V : [A]_{fe}[x]_e = [Ax]_f = P_{fh}[Ax]_h = P_{fh}[A]_{hg}[x]_g = P_{fh}[A]_{hg}P_{ge}[x]_e$.
Значит $[A]_{fe} = P_{fh}[A]_{hg}P_{ge} \Rightarrow rank[A]_{fe} = rank[A]_{hg}$. (здесь P_{fh} - матрица перехода из базиса h в базис f; P_{ge} - матрица перехода из базиса e в базис g)

2. $\Leftarrow$:
Пусть B, C - матрицы одинаковых размеров ($A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$), такие что $rankB = rankC$. Из первого семестра знаем, что в таком случае они эквивалентны, то есть $\exists$ невырожденные матрицы $P, Q : B = PCQ$.
Выберем произвольные линейные пространства V, W - такие, что их размерности совпадают с размерами матриц ($dimV = n, dimW = m$), а также произвольные базисы $e \in V, f \in W$. Построим линейный оператор $A : V \to W$ такой,

что $[A]_{fe} = B$ (просто определяем действие оператора на базисные векторы так, чтобы $Ae_i = b_{1i}f_1 + ... + b_{mi}f_m$)
Затем построим базисы $g \in V, h \in W$ так, чтобы матрицы P, Q были матрицами перехода: $Q = P_{ge}, P = P_{fh}$. Тогда $C = P^{-1}BQ^{-1} = P_{hf}[A]_{fe}P_{eg} = [A]_{hg} \Rightarrow$ матрицы B, C являются матрицами одного оператора в парах базисов e, f и g, h.
■

Задача 12:

Докажите, что определитель и след квадратный матрицы являются инвариантами подобия.

Решение:
Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - подобные матрицы (то есть $A = PBP^{-1}$). Тогда $|A| = |PBP^{-1}| = |P||B||P^{-1}| = |P||B|\frac{1}{|P|} = |B|$.
Также $trA = trP(BP^{-1}) = tr(BP^{-1})P = trB$.
■

Задача 13:

Докажите, что характеристический многочлен квадратной матрицы является инвариантом подобия.

Решение:
Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - подобные матрицы (то есть $A = PBP^{-1}$). Тогда $|A - \lambda I| = |PBP^{-1} - \lambda I| = |P(B - \lambda I)P^{-1}| = |P||B - \lambda I||P^{-1}| = |P||B - \lambda I|\frac{1}{|P|} = |B - \lambda I|$.
■

Задача 14:

Найдите характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$

Решение:

1. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}}_{\text{применили теорему Лапласа по первой и последней строке}} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}^{\frac{n}{2}}}_{\text{продолжили Лапласом}} = (\lambda-1)^{\frac{n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n}{2}}$$

2. $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}}_{\text{Применили теорему Лапласа по центральной строке}} =$$

$$\underbrace{(1-\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}}_{\text{воспользовались первым пунктом решения}} = -(\lambda-1)^{\frac{n+1}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}$$

■

Задача 15:

Найдите все инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве всех вещественных многочленов.

Решение:

Заметим, что при действии оператора дифференцирования степень многочлена понижается на 1. Значит, все пространства многочленов степени не выше n будут инвариантными $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Докажем, что других инвариантных пространств нет:

Пусть M - произвольное инвариантное подпространство оператора дифференцирования и f - многочлен максимальной для M степени m. Дифференцируя его, получим многочлены степеней $0, 1, ..., m-1$, которые лежат в M в силу того, что это инвариантное подпространство. Таким образом, M совпадает с пространством многочленов степени не выше m.

■

Задача 16:

Докажите, что число является собственным значением линейного оператора на конечномерном пространстве в том и только том случае, когда оно является корнем его характеристического многочлена.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Пусть λ - собственное значение линейного оператора $A : V \to V$ над полем $\mathbb{P}$. Тогда $\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$.

2. $\Leftarrow$:
Пусть λ - корень характеристического многочлена линейного оператора $A : V \to V$ над полем $\mathbb{P}$. Тогда $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \exists x \neq 0 : (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda$ - собственное значение A.
$\blacksquare$

Задача 17:

Линейный оператор действует в n-мерном пространстве над полем, содержащим все корни его характеристического многочлена. Докажите, что при любом заранее предписанном порядке корней существует базис пространства, в котором матрица оператора приобретает верхний треугольный вид с главной диагональю, заполненной корнями в заранее предписанном порядке.

Решение:
Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор, действующий над полем $\mathbb{P}$, $dimV = n$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{P}$ - корни характеристического многочлена A с учетом кратностей. Пусть вектор e_1 - собственный для собственного значения λ_1. Достроим его до базиса $e_1, ..., e_n$. Тогда в этом базисе матрица оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times \\ 0 & B \end{pmatrix}, B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

Задача 18:

Докажите, что если матрицы A и B подобны, то для произвольного многочлена $f(\lambda)$ матрицы $f(A)$ и $f(B)$ тоже подобны.

Решение:
Пусть $A = PBP^{-1}$ и $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n$. Тогда $f(A) = a_0I + a_1A + ... + a_nA^n = a_0I + a_1PBP^{-1} + ... + a_n(PBP^{-1})^n = a_0PIP^{-1} + a_1PBP^{-1} + ... + a_nPB^nP^{-1} = P(a_0I + a_1B + ... + a_nB^n)P^{-1} = Pf(B)P^{-1}$ (воспользовались тем, что $(PBP^{-1})^n = \underbrace{PBP^{-1}PB \cdots PBP^{-1}}_{\text{n раз}} = PB^nP^{-1}$)

■

Задача 19:

Докажите, что минимальный многочлен, аннулирующий квадратную матрицу, является делителем ее характеристического многочлена.

Решение:
Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - квадратная матрица, $f(\lambda)$ - ее минимальный многочлен, а $g(\lambda)$ - характеристический.

Предположим противное - пусть $g(\lambda) \not\vdots\ f(\lambda)$. Тогда $g(\lambda) = f(\lambda)h(\lambda) + r(\lambda)$, $deg(r) < deg(f)$.
Тогда $g(A) = f(A)h(A) + r(A) \Rightarrow 0 = 0 \times h(A) + r(A) \Rightarrow r(A) = 0$
($g(A) = 0$ по теореме Кэли-Гамильтона, $f(A) = 0$ по условию)
То есть $r(A) = 0, deg(r) < deg(f) \Rightarrow f(\lambda)$ - не минимальный многочлен $\Rightarrow$ противоречие. Значит $g(\lambda) \vdots f(\lambda)$.
■

Задача 20:

Докажите, что любая квадратная матрица с элементами из произвольного поля аннулируется своим характеристическим многочленом.

Решение:
Пусть $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ - квадратная матрица порядка n с элементами из поля $\mathbb{P}$ и $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - собственные значения A.

Знаем, что $A = S^{-1}TS$, где $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = S^{-1}T^nS \Rightarrow \forall f(x) :$ $f(A) = S^{-1}f(T)S$

Пусть $f(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A. Тогда

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda) \Rightarrow f(T) = (\lambda_1 I - T)...(\lambda_n I - T)$$

Обозначим $M_i = \lambda_i I - T$ и заметим, что $M_i = \begin{pmatrix} \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & 0 & \cdots & \times \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \times \end{pmatrix}$ - верхнетреугольная матрица с нулем в позиции (i, i).

Обычным умножением матриц проверяется, что $f(T) = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = 0$, так как $M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \times \\ & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \times & \cdots & \cdots & \times \\ & 0 & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \times \\ & 0 & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{pmatrix}$,

$M_1 \times ... \times M_k$ - аналогично будет верхнетреугольной матрицей с нулевой подматрицей $k \times k \Rightarrow f(A) = S^{-1} 0 S = 0$

Если какие-то из собственных значений не принадлежат $\mathbb{P}$, то расширим поле $\mathbb{P}$ до поля разложения характеристического многочлена матрицы A и рассмотрим ее как матрицу над этим, более широким, полем.

■

Задача 21:

Докажите, что любой приведенный многочлен степени выше первой является характеристическим многочленом некоторой матрицы.

Решение:

Пусть наш приведенный многочлен имеет вид $f(\lambda) = \lambda_n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{P}[x]$

Рассмотрим матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ - матрица Фробениуса для многочлена f.

Посчитаем характеристический многочлен A_f:

$$|A_f - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = \text{(прибавим к 1 строке } i \text{ строку,}$$

$$\text{умноженную на } \lambda^{i-1}\ \forall i = 2, ..., n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 - a_1\lambda - ... - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\text{(теорема Лапласа по 1 строке)} = (-1)^{n+1}(-a_0 - a_1\lambda - ... - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$(-1)^{n+2} f(\lambda) = (-1)^n f(\lambda)$

■

Задача 22:

Преобразование $A \to PAP^{-1}$ будем называть элементарным преобразованием подобия, если матрица P является либо матрицей перестановки, либо матрицей вида $I + \gamma E_{kl}$, где матрица E_{kl} отличается от нулевой матрицы только одним элементом — единицей в позиции (k, l) при $k \neq l$, а число γ может быть произвольным и выбирается в зависимости от ситуации. Докажите, что матрица порядка n с помощью $O(n^2)$ элементарных преобразований подобия приводится к верхнему почти треугольному виду.

<u>Решение:</u>

Пусть наша исходная матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

На первом шаге хотим занулить все элементы на позициях $(i, 1)\ \forall i \geq 3$.

Если $a_{i1} \neq 0$ для некоторого $j \geq 3$, то преобразованием подобия перейдем к матрице

$$P_1AP_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- здесь матрица P - матрица перестановки, меняющая местами строки с номерами $2, i \Rightarrow P^{-1}$ поменяет местами столбцы с номерами $2, i$.
Теперь из каждой строки с номером $i \geq 3$ вычтем 2-ю строку, домноженную на $\frac{a_{i1}}{a_{j1}} \Rightarrow$ получим матрицу

$$P_{n-1}...P_1AP_1^{-1}...P_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ a_{j1} & \ddots & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots & \times \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

- для того, чтобы произошло именно преобразование подобия, мы домножали справа на $P_i^{-1} \Rightarrow$ к i столбцу прибавляли второй с тем же множителем (но это никак не повлияло на зануление первого столбца).
Таким образом за $n-1$ преобразований подобия перешли к матрице, указанной выше. Теперь рассмотрим у этой матрицы подматрицу размеров $(n-1)\times(n-1)$, расположенную в правом нижнем углу.
К ней можно применить предположение индукции (индукция по порядку матрицы, база - $n = 1$ - уже является верхней почти треугольной). Т.е приведем исходную матрицу к верхней почти треугольной за $O((n-1)^2)+(n-1) = O(n^2)$ преобразований подобия.
Для подматрицы нужные нам матрицы преобразований будут иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

■

Задача 23:

Докажите, что алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности.

Решение:
Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{P}$, $dimV = n$.
Пусть λ_i - собственное значение A. Рассмотрим произвольный базис, в котором первые l_i векторов принадлежат собственному пространству для λ_i (т.е $ker(A - \lambda_i I)$). В этом базисе матрица оператора имеет вид: $\begin{pmatrix} \lambda_i I_{l_i} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$ $|A - \lambda I_n| = (\lambda_i - \lambda)^{l_i} |A_{22} - \lambda I_{n-l_i}| \Rightarrow$ алгебраическая кратность λ_i не меньше l_i.
■

Задача 24:

Докажите, что собственные векторы для попарно различных собственных значений линейно независимы.

Решение:
Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{P}$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ - попарно различные собственные значения A и $x_1, ..., x_m$ - соответствующие собственные векторы.
Рассмотрим их линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m = 0$. Умножим это равенство на λ_m, а также подействуем на обе его стороны линейным оператором A. В результате получим два равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 x_1 + ... + \alpha_m \lambda_m x_m = 0 \\ \alpha_1 \lambda_m x_1 + ... + \alpha_m \lambda_m x_m = 0 \end{cases}$$

Вычитаем из первого второе

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0$$

То есть если $x_1, ..., x_{m-1}$ - линейно независимы, то $\alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0 \Rightarrow$ $\alpha_m x_m = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$ (так как $x_m \neq 0$)
Далее применяем индукцию (база - 1 вектор очевидно линейно независим сам с собой).
■

Задача 25:

Докажите, что если матрица порядка n имеет n попарно различных собственных значений, то она диагонализуема.

Решение:
Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрица с n попарно различными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и $x_1, ..., x_n$ - соответствующие собственные векторы.
Из предыдущей задачи знаем, что векторы $x_1, ..., x_n$ - линейно независимы $\Rightarrow$ они образуют базис $\mathbb{R}^n$.

Составим из них матрицу $X = (x_1, ..., x_n)$. Тогда $AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (так как $Ax_i = \lambda_i x_i$) $\Rightarrow XAX^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ - диагональная матрица $\Rightarrow A$ - диагонализуема.
■

Задача 26:

Докажите, что для нильпотентности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы он был квазискалярным с единственным собственным значением, равным нулю.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Пусть $A : V \to V$ - нильпотентный линейный оператор, то есть $\exists m$: $A^m = 0$
Тогда $\forall$ собственного вектора x: $Ax = \lambda x \Rightarrow A^m x = \lambda^m x \Rightarrow \lambda^m x = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ A - квазискалярный с единственным собственным значением $\lambda = 0$
2. $\Leftarrow$:
Пусть $A : V \to V$ - квазискалярный линейный оператор с собственным значением $\lambda = 0$
Тогда его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (-\lambda)^n$
По теореме Кэли-Гамильтона $f(A) = 0 \Rightarrow (-1)^n A^n = 0 \Rightarrow A^n = 0 \Rightarrow A$ - нильпотентный.
■

Задача 27:

Докажите, что линейный оператор A является квазискалярным с единственным собственным значением λ тогда и только тогда, когда сдвинутый оператор $A - \lambda I$ является нильпотентным.

Решение:

1. $\Rightarrow$:
Пусть $A : V \to V$ - квазискалярный линейный оператор с собственным значением λ
Тогда сдвинутый оператор $A - \lambda I$ - нильпотентный. Докажем:
$\forall$ собственного вектора оператора A имеем: $(A - \lambda I)x = Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow x$ - собственный для сдвинутого оператора с собственным значением $\lambda = 0$
Если $\exists x : (A - \lambda I)x = \alpha x, \alpha \neq 0$, то $Ax = (\lambda + \alpha)x \Rightarrow A$ - не квазискалярный $\Rightarrow$ противоречение $\Rightarrow A - \lambda I$ - квазискалярный с собственным значением $\lambda = 0 \Rightarrow$ он нильпотентный (по предыдущей задаче).
2. $\Leftarrow$:
$A - \lambda I$ - нильпотентный $\Rightarrow$ он квазискалярный с единственным собственным значением $\lambda = 0$ (по предыдущей задаче).
Тогда $\forall$ собственного вектора оператора $A - \lambda I$ имеем: $(A - \lambda I)x = Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow x$ - собственный для A с собственным значением λ
Если $\exists x : Ax = \alpha x, \alpha \neq \lambda$, то $(A-\lambda I)x = (\alpha-\lambda)x \Rightarrow A-\lambda I$ - не квазискалярный $\Rightarrow$ противоречение $\Rightarrow A$ - квазискалярный с собственным значением λ
$\blacksquare$

Задача 28:

Докажите, что любой вырожденный линейный оператор либо является нильпотентным, либо расщепляется в прямую сумму нильпотентного и обратимого операторов.

<u>Решение:</u>
Пусть $A : V \to V$ - вырожденный линейный оператор, $dimV = n$
По теореме об обратимом операторе - $kerA \neq \{0\}$ (то есть ядро оператора A нетривиально). Обозначим $N_k = kerA^k, M_k = imA^k$

Рассмотрим N_k и N_{k+1}:
$x \in N_k \Rightarrow A^k x = 0 \Rightarrow A^{k+1}x = A(A^k x) = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1} \Rightarrow N_k \subseteq N_{k+1}$
Для M_k и M_{k+1}:
$x \in M_{k+1} \Rightarrow x = A^{k+1}y = A^k(Ay) \Rightarrow x \in M_k \Rightarrow M_{k+1} \subseteq M_k$

Так как V - конечномерное, то $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $N_1 \subset ... \subset N_{m-1} = N_m$ (в силу конечномерности ядра не могут расширяться бесконечно).
По теореме о ранге и дефекте:

$$\begin{cases} dimN_{m-1} + dimM_{m-1} = n \\ dimN_m + dimM_m = n \\ dimN_m = dimN_{m-1} \end{cases} \Rightarrow dimM_{m-1} = dimM_m \Rightarrow M_{m-1} = M_m$$

То есть

$$\begin{cases} N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_{m-1} = N_m \\ M_1 \supset M_2 \supset ... \supset M_{m-1} = M_m \end{cases}$$

Покажем теперь, что $N_{m+k} = N_{m-1} \forall k \in \mathbb{N}$. Достаточно показать для N_{m+1}:
$x \in N_{m+1} \Rightarrow A^{m+1}x = 0 \Rightarrow A^m(Ax) = 0 \Rightarrow Ax \in N_m = N_{m-1} \Rightarrow Ax \in N_{m-1} \Rightarrow A^{m-1}(Ax) = 0 \Rightarrow A^m x = 0 \Rightarrow x \in N_m = N_{m-1} \Rightarrow x \in N_{m-1} \Rightarrow N_{m-1} = N_{m+1}$
Для всех $k \geq 2$ - аналогично.
По теореме о ранге и дефекте аналогично получаем, что $M_{m+k} = M_{m-1} \forall k \in \mathbb{N}$

Теперь задача разбивается на 2 случая:
1. $N_{m-1} = V \Rightarrow A^{m-1} = 0 \Rightarrow A$ - нильпотентный.
2. $N_{m-1} \neq V \Rightarrow N_{m-1}, M_{m-1}$ - не пустые (N_{m-1} - не пустое, так как A - вырожденный $\Rightarrow A^{m-1}$ - вырожденный; M_{m-1} - не пустое по теореме о ранге и дефекте).

Докажем, что $V = N_{m-1} \oplus M_{m-1}$:
$dim N_{m-1} + dim M_{m-1} = dim V$ по теореме о ранге и дефекте. Кроме того,
$x \in N_{m-1} \cap M_{m-1} \Rightarrow A^{m-1}x = 0, x = A^{m-1}y \Rightarrow A^{2(m-1)}y = 0 \Rightarrow y \in N_{2(m-1)} = N_{m-1} \Rightarrow x = A^{m-1}y = 0 \Rightarrow N_{m-1} \cap M_{m-1} = \{0\}$
Из этого следует, что $V = N_{m-1} \oplus M_{m-1}$ (более подробное пояснение во втором пункте задачи 10 из этого же раздела).

Также N_{m-1}, M_{m-1} - инвариантные для A:
$x \in N_{m-1} \Rightarrow A^{m-1}x = 0 \Rightarrow A^{m-1}(Ax) = A(A^{m-1}x) = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow Ax \in N_{m-1}$
$x \in M_{m-1} \Rightarrow x = A^{m-1}y \Rightarrow Ax = A^m y = A^{m-1}(Ay) \Rightarrow Ax \in M_{m-1}$

Теперь:
$A^{m-1}x = 0 \ \forall x \in N_{m-1} \Rightarrow A|N_{m-1}$ - нильпотентный на N_{m-1}
$\forall x \in M_{m-1} : Ax = A^m y \neq 0$, если $x \neq 0$, так как иначе:
$A^m y = 0 \Rightarrow y \in N_m = N_{m-1} \Rightarrow x = A^{m-1}y = 0$ - противоречие.
То есть единственный вектор, который переводится в 0 - нулевой $\Rightarrow ker(A|M_{m-1}) = \{0\} \Rightarrow A|M_{m-1}$ - обратимый (по теореме об обратимом операторе)
■

Задача 29:

Пусть линейный оператор действует на конечномерном пространстве над полем, которое содержит все корни его характеристического многочлена. Докажите, что он расщепляется в прямую сумму своих сужений на корневые пространства своих попарно различных собственных значений.

<u>Решение:</u>
1. Для начала докажем вспомогательную теорему:

Пусть линейный оператор имеет собственное значение λ_i алгебраической кратности k_i. Тогда либо он является квазискалярным, либо расщепляется в прямую сумму квазискалярного оператора, действующего на подпространстве размерности k_i, и оператора, для которого λ_i не является собственным значением.

<u>Доказательство:</u>
Рассмотрим сдвинутый оператор $B = A - \lambda_i I$ - вырожденный, так как имеет собственное значение $\lambda = 0$ алгебраической кратности $k_i \Rightarrow kerB \neq \{0\}$
Из предыдущей задачи имеем:
1. B - нильпотентный $\Rightarrow A$ - квазискалярный
2. $B = C \oplus D$, где C - нильпотентный, D - обратимый. То есть (по определению прямой суммы операторов) $V = L \oplus M$, $C = B|L = (A - \lambda_i I)|L, D = B|M = (A - \lambda_i I)|M$, $L = kerB^m, M = imB^m, m$ - степень, начиная с которой ядра и образы перестают вкладываться друг в друга - по построению из предыдущей задачи.

D - обратимый $\Rightarrow \lambda = 0$ не является собственным значением $D \Rightarrow \lambda = \lambda_i$ не является собственным значением $A|M$ $(A = D + \lambda_i I)$

Знаем, что $\lambda = 0$ - собственное значение B алгебраической кратности k_i, характеристический многочлен B является произведением характеристических многочленов C и D, и $\lambda = 0$ не является собственным значением $D \Rightarrow dimL = k_i$, так как корень $\lambda = 0$ кратности k_i полностью дает характеристический многочлен C, а в силу нильпотентности оператора C других корней у него нет, а значит $dimL$ в точности равно k_i.

То есть $A|L = (C + \lambda_i I)|L$ - квазискалярный и $dimL = k_i$

2. Теперь перейдем непосредственно к решению задачи:
Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор, имеющий s попарно различных собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_s$ кратностей $k_1, ..., k_s$. Ведем индукцию по s:

- $s = 1 \Rightarrow A$ - квазискалярный $\Rightarrow (A - \lambda I)$ - нильпотентный $\Rightarrow ker(A - \lambda I)^n = V$ - верно

- $s \geq 2 \Rightarrow A = A|K_1 \oplus A|W$, где W - инвариантное пространство, на котором $A|W$ не имеет собственного значения λ_1 (по вспомогательной теореме), K_1 - корневое для λ_1 (так как у нас по построению из вспомогательной теоремы $K_1 = ker(A - \lambda_1 I)^{k_1}$, а $m \leq k_1$, так как иначе $dim(ker(A - \lambda_1 I)^m) > k_1$ - противоречие с доказанным во вспомогательной теореме).
  По предположению индукции $W = W_2 \oplus ... \oplus W_s$, где W_i - корневое пространство для $A|W$. Так как кратности $k_2, ..., k_s$ у A и $A|W$ одинаковые,

то $W_i = K_i$ (так как $W_i \subseteq K_i$ и при этом $dimW_i = dimK_i = k_i$).
Значит $V = K_1 \oplus W = K_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_s = K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_s$

■

Задача 30:

Матрица A порядка n имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и соответствующие им собственные векторы $v_1, ..., v_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $B : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, BX = A^3XA^4$

Решение:
Так как матрица A имеет попарно различные собственные значения, то она диагонализуема (задача 25 из этого раздела).
Значит $A = V\Lambda V^{-1}, V = [v_1, ..., v_n], \Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$

Тогда $BX = A^3XA^4 = V\Lambda^3V^{-1}XV\Lambda^4V^{-1}$
Пусть X - собственный вектор оператора $B \Rightarrow V\Lambda^3V^{-1}XV\Lambda^4V^{-1} = \lambda X \iff \Lambda^3(V^{-1}XV)\Lambda^4 = \lambda(V^{-1}XV)$
Таким образом, X - собственный вектор оператора $B \iff Y = V^{-1}XV$ - собственный вектор оператора $C : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, CX = \Lambda^3X\Lambda^4$

Рассмотрим $Y = E_{ij}$ - матрица, в которой на позиции (i, j) стоит 1, а на всех остальных - 0. Заметим, что $CY = \Lambda^3Y\Lambda^4 = \lambda_i^3\lambda_j^4E_{ij} \Rightarrow Y$ - собственный вектор для C.
То есть нашли n^2 линейно независимых собственных векторов оператора $C \Rightarrow X_{ij} = VE_{ij}V^{-1}$ - собственные для B, причем также линейно независимые:
$\alpha_{11}X_{11} + ... + \alpha_{nn}X_{nn} = 0 \Rightarrow V(\alpha_{11}E_{11} + ... + \alpha_{nn}E_{nn})V^{-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{11}E_{11} + ... + \alpha_{nn}E_{nn} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = ... = \alpha_{nn} = 0$
То есть нашли все собственные векторы B: $X_{ij} = VE_{ij}V^{-1}$ для собственного значения $\lambda_i^3\lambda_j^4$
■

Задача 31:

Докажите, что минимальное инвариантное относительно оператора A подпространство $M(A, x)$, содержащее заданный ненулевой вектор x, совпадает с пространством Крылова $L_k(A, x)$, содержащим вектор A^kx. Его размерность равна минимальному значению k, при котором $A^kx \in L_k(A, x)$.

Решение:
Пусть векторы $x, Ax, ..., A^{k-1}x$ - линейно независимы, а вектор A^kx выражается в виде их линейной комбинации. Понятно, что в таком случае $dim(L_k(A,x)) = k$ (так как это по определению линейная оболочка k линейно независимых векторов).

Пусть $A^kx = \alpha_1 x + ... + \alpha_k A^{k-1}x$. Тогда $\forall y \in L_k(A,x) : y = \beta_1 x + ... + \beta_k A^{k-1}x$ имеем $Ay = \beta_1 Ax + ... + \beta_k A^k x = \beta_1 Ax + ... + \beta_{k-1}A^{k-1}x + \beta_k(\alpha_1 x + ... + \alpha_k A^{k-1}x) = \beta_k\alpha_1 x + (\beta_1 + \beta_k\alpha_2)Ax + ... + (\beta_{k-1} + \beta_k\alpha_k)A^{k-1}x \in L_k(A,x) \Rightarrow L_k(A,x)$ - инвариантное для A.

Очевидно, что любое инвариантное пространство, содержащее вектор x, должно содержать векторы $Ax, ..., A^{k-1}x, ... \Rightarrow$ оно содержит $L_k(A,x) \Rightarrow M(A,x) = L_k(A,x)$ и $dim(L_k(A,x)) = k$

Также заметим, что $\forall n \in \mathbb{N} : L_{k+n}(A,x) = L_k(A,x)$, так как $A^{k+n}x \in L_k(A,x)$ в силу его инвариантности.
То есть $M(A,x) = L_m(A,x)\ \forall m \geq k$ и при этом $dim(L_m(A,x)) = k$.

В конце я показал, что в качестве минимального пространства мы можем взять любое крыловское, для которого выполнено $A^mx \in L_m(A,x)$, однако его размерность будет равна минимальному значению m, при котором это выполняется
■

Задача 32:

Докажите, что минимальное инвариантное относительно оператора A подпространство $M(A,x)$, содержащее заданный вектор $x \neq 0$, нерасщепляемо в том и только том случае, когда сужение оператора A на нем квазискалярно.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Предположим, что сужение не квазискалярно $\Rightarrow$ пространство можно расщепить в прямую сумму корневых подпространств (задача 29 из этого раздела) $\Rightarrow$ противоречие с минимальностью пространства $M(A,x)$.
То есть сужение оператора на нем квазискалярно.

2. $\Leftarrow$:
По предыдущей задаче знаем, что $M(A,x) = L_k(A,x) := L(x, Ax, ..., A^{k-1}x)$, причем $A^kx \in L_k(A,x)$ и $dimL_k(A,x) = k$
Пусть единственное собственное значение сужения $A|M(A,x)$ равно λ

Рассмотрим оператор $B := A - \lambda I$ - для него $B|M(A,x)$ - нильпотентный.
Докажем, что $L_k(B,x) = L_k(A,x)$:

- Пусть $y \in L_k(B,x) \Rightarrow y = \alpha_1 x + ... + \alpha_k B^{k-1}x = \alpha_1 x + ... + \alpha_k (A - \lambda I)^{k-1}x = \beta_1 x + ... + \beta_k A^{k-1}x$ (так как единичный оператор коммутирует с любым, то можем раскрыть степени по биному и сгруппировать коэффициенты при одинаковых степенях $A \Rightarrow$ получим, что $y \in L_k(A,x)) \Rightarrow L_k(B,x) \subseteq L_k(A,x)$

- Пусть $y \in L_k(A,x) \Rightarrow$ действуем аналогично, только теперь $A = B + \lambda I \Rightarrow y \in L_k(B,x) \Rightarrow L_k(A,x) \subseteq L_k(B,x)$

Доказали двухстороннюю вложенность $\Rightarrow L_k(A,x) = L_k(B,x) \Rightarrow dim L_k(B,x) = k \Rightarrow x, Bx, ..., B^{k-1}x$ - линейно независимые

Пусть $L \subseteq M(A,x)$ - ненулевое инвариантное пространство для B (а значит и для A).
Возьмем $z \in L, z \neq 0 \Rightarrow z = \sum_{j=i}^{k-1} \alpha_j B^j x$, где $\alpha_1 = ... = \alpha_{i-1} = 0, \alpha_i \neq 0$
Так как B - нильпотентный и $dim M(A,x) = k$, то $B^k x = 0 \; \forall x \in M(A,x)$ (например потому, что по теореме Кэли-Гамильтона имеем $(B|M(A,x))^k = 0$).
Тогда $B^{k-i-1}z = \alpha_i B^{k-1}x \in L$, так как L - инвариантное $\Rightarrow B^{k-1}x \in L$
В силу произвольного выбора L получаем, что все инвариантные пространства имеют общий вектор $B^{k-1}x \Rightarrow M(A,x)$ нельзя расщепить в прямую сумму инвариантных подпространств.
■

Задача 33:

Докажите, что если B — нильпотентный линейный оператор, векторы $x, Bx, ..., B^{k-1}x$ ненулевые и $B^k x = 0$, то векторы $x, Bx, ..., B^{k-1}x$ линейно независимы.

<u>**Решение:**</u>
Рассмотрим линейную комбинацию векторов $x, Bx, ..., B^{k-1}x$, равную 0:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 Bx + ... + \alpha_k B^{k-1}x = 0$$

Подействуем на обе части равенства оператором B^{k-1}:

$$\alpha_1 B^{k-1}x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

То есть получили, что

$$\alpha_2 Bx + ... + \alpha_k B^{k-1}x = 0$$

Теперь подействуем на обе части равенства оператором $B^{k-2} \Rightarrow$ получим $\alpha_2 = 0$.
Действуя аналогично, получим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0 \Rightarrow x, Bx, ..., B^{k-1}x$ -

линейно независимы.
■

Задача 34:

Линейный оператор A называется нильпотентным на векторе $x \neq 0$, если существует натуральное число k, для которого $A^k x = 0$. Минимальное такое k называется индексом нильпотентности оператора A на векторе x. Пусть A — линейный оператор и $k_1, ..., k_t$ — его индексы нильпотентности на ненулевых векторах $x_1, ..., x_t$. Докажите, что для линейной независимости составной системы векторов Крылова $x_1, Ax_1, ..., A^{k_1-1}x_1, ..., x_t, Ax_t, ..., A^{k_t-1}x_t$ необходима и достаточна линейная независимость векторов $A^{k_1-1}x_1, ..., A^{k_t-1}x_t$.

Решение:
1. $\Rightarrow$:
Из линейной независимости системы векторов очевидно следует линейная независимость любой ее подсистемы.

2. $\Leftarrow$:
Пусть

$$\begin{cases} x_1, Ax_1, ..., A^{k_1-1}x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_t, Ax_t, ..., A^{k_t-1}x_t \end{cases} \quad \text{- данная нам система векторов}$$

$$k_1, ..., k_t\text{- индексы нильпотентности}$$

Обозначим $k = max\{k_1, ..., k_t\}$ и будем вести индукцию по k.

- $k = 1 \Rightarrow$ вся система векторов линейно независима по условию $\Rightarrow$ верно.
- $k \geq 2 \Rightarrow$ рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1k_1}A^{k_1-1}x_1 + ... + \alpha t1x_t + ... + \alpha_{tk_t}A^{k_t-1}x_t = 0 \ (*)$$

Подействуем на обе части равенства оператором $A^{k-1} \Rightarrow$ получим

$$\alpha_{i_11}A^{k-1}x_{i_1} + ... + \alpha_{i_r1}A^{k-1}x_{i_r} = 0$$

Здесь $x_{i_1}, ..., x_{i_r}$ - векторы, для которых $k_{i_1} = ... = k_{i_r} = k$
Значит, $\alpha_{i_11} = ... = \alpha_{i_r1} = 0$, так как $A^{k-1}x_{i_1}, ..., A^{k-1}x_{i_r}$ - линейно независимы по условию как подсистема $A^{k_1-1}x_1, ..., A^{k_t-1}x_t$
Не ограничивая общности, будем считать, что $x_{i_1} = x1, ..., x_{i_r} = x_r$

Тогда обозначим $y_1 = Ax_1, ..., y_r = Ax_r$ и рассмотрим систему векторов

$$\begin{cases} y_1, Ay_1, ..., A^{k_1-2}y_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_r, Ay_r, ..., A^{k_r-2}y_r \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_t, Ax_t, ..., A^{k_t-1}x_t \end{cases}$$

Для этой системы максимальный индекс нильпотентности уменьшился, так как мы исключили из исходной системы векторы, у которых он был равен $k \Rightarrow$ данная система линейно независима по предположению индукции $\Rightarrow$ все остальные коэффициенты в $(*)$, кроме $\alpha_{11}, ..., \alpha_{r1}$, тоже нулевые $\Rightarrow$ исходная система векторов линейно независима.

■

Задача 35:

Докажите, что любой нильпотентный оператор, действующий на конечномерном пространстве, расщепляется в прямую сумму нерасщепляемых операторов, действующих на инвариантных подпространствах Крылова.

Решение:

Пусть $A : V \to V$ - нильпотентный линейный оператор, $dimV = n$. Будем вести индукцию по n.

- $n = 1 \Rightarrow$ всё пространство является пространством Крылова $\Rightarrow$ верно

- $n \geq 2$:
  A - нильпотентный $\Rightarrow defA > 0 \Rightarrow rgA < n$. То есть imA - инвариантное пространство для A размерности $\leq n - 1$.
  Обозначим $W := imA \Rightarrow dimW \leq n - 1$
  В силу индуктивного предположения:

  $W = L_{k_1}(A, x_1) \oplus ... \oplus L_{k_t}(A, x_t)$ - расщепление на инвариантные пространства Крылова

  Общее число векторов в системе

  $$\begin{cases} x_1, Ax_1, ..., A^{k_1-1}x_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_t, Ax_t, ..., A^{k_t-1}x_t \end{cases}$$

  равно $r = rgA$, так как $dimW = rgA$
  Так как расщепляли образ, то каждый из векторов $x_1, ..., x_t \in imA \Rightarrow x_1 =$

$Ay_1, ..., x_t = Ay_t$
Рассмотрим составную систему Крылова:

$$\begin{cases} y_1, Ay_1, ..., A^{k_1}y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_t, Ay_t, ..., A^{k_t}y_t \end{cases} \text{ - в ней t + r векторов}$$

Векторы $A^{k_1}y_1 = A^{k_1-1}x_1, ..., A^{k_t}y_t = A^{k_t-1}x_t$ линейно независимы (как подсистема базиса W, составленного из базисов пространств Крылова) и лежат в ядре A, так как из нильпотентности A следует нильпотентность его сужений $A|L_{k_i} \Rightarrow A^{k_i}x = 0 \ \forall x \in L_{k_i}$
Если $t < defA$, то дополним $A^{k_1}y_1, ..., A^{k_t}y_t$ до базиса $kerA$ векторами $y_{t+1}, ..., y_d$, где $d = defA$
Тогда система

$$\begin{cases} y_1, Ay_1, ..., A^{k_1}y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_t, Ay_t, ..., A^{k_t}y_t \\ y_{t+1} \\ \cdots \\ y_d \end{cases}$$

линейно независима в силу линейной независимости последних векторов в ней (смотри предыдущую задачу) $\Rightarrow$

$$V = L_{k_1+1}(A, y_1) \oplus ... \oplus L_{k_t+1}(A, y_t) \oplus L_1(A, y_{t+1}) \oplus ... \oplus L_1(A, y_d)$$

Все пространства Крылова в этом расщеплении нерасщепляемы, так как A - нильпотентный $\Rightarrow$ квазискалярный $\Rightarrow$ сужения A на пространства Крылова квазискалярны $\Rightarrow$ они нерасщепляемы (задача 32 из этого раздела)

■

Задача 36:

Докажите, что в любом расщеплении конечномерного пространства в прямую сумму инвариантных подпространств Крылова для нильпотентного оператора A число подпространств размерности k равно $N_k = 2defA^k - defA^{k-1} - defA^{k+1}$.

Решение:
Пусть $A : V \to V$ - нильпотентный линейный оператор, $dimV = n$ и

$V = L_{k_1}(A, x_1) \oplus ... \oplus L_{k_s}(A, x_s)$ - произвольное расщепление V в прямую сумму инвариантных пространств Крылова

Тогда базис всего пространства V имеет вид

$$x_1, ..., A^{k_1-1}x_1, ..., x_s, ..., A^{k_s-1}x_s$$

Здесь $k_1, ..., k_s$- индексы нильпотентности A на векторах $x_1, ..., x_s$

Обозначим $N_{\geq k}$ - число пространств размерности $\geq k$ и докажем, что $N_{\geq k} = defA^k - def^Ak - 1$:

1. $N_{\geq 1} = s = defA = defA^1 - defA^0$ (так как $A^{k_1-1}x_1, ..., A^{k_s-1}x_s \in kerA$, то, если $s < defA$, то дополнили бы до базиса ядра векторами $x_{s+1}, ..., x_d \Rightarrow$ получили бы базиса пространства вида
$$\underbrace{\mathrm{x}_1, ..., A^{k_1-1}x_1, ..., x_s, ..., A^{k_s-1}x_s, x_{s+1}, ..., x_d}_{\text{последние векторы системы линейно независимы, значит вся система линейно независима (задача 34 из этого раздела)}} \Rightarrow$$
противоречение с размерностью V)

2. Заметим, что $N_{\geq k}$ - это число векторов вида $A^{k_i-l}x_i$ при $1 \leq l \leq min\{k, k_i\}, 1 \leq i \leq s$ минус число векторов вида $A^{k_i-l}x_i$ при $1 \leq l \leq min\{k-1, k_i\}, 1 \leq i \leq s$
<u>Пояснение</u>
Еще раз изобразим наши базисы пространств Крылова из прямой суммы:
$$\begin{cases} L_{k_1} : x_1, ..., A^{k_1-1}x_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ L_{k_s} : x_s, ..., A^{k_s-1}x_S \end{cases}$$
Заметим, что $N_{\geq k}$ - это число пространств Крылова, у которых $k_i \geq k$.
Теперь посмотрим, что такое $A^{k_i-l}x_i, 1 \leq l \leq min\{k, k_i\}$:
   - При $k > k_i$ получаем $min\{k, k_i\} = k_i \Rightarrow l$ пробегает все значения от 1 до $k_i \Rightarrow$ получим все k_i векторов из пространства L_{k_i}
   - При $k_i \geq k$ получаем $min\{k, k_i\} = k \Rightarrow l$ пробегает все значения от 1 до $k \Rightarrow$ получим последние k векторов из пространства L_{k_i}

   Что такое $A^{k_i-l}x_i, 1 \leq l \leq min\{k-1, k_i\}$:
   - При $k > k_i$ получаем $min\{k-1, k_i\} = k_i \Rightarrow l$ пробегает все значения от 1 до $k_i \Rightarrow$ получим все k_i векторов из пространства L_{k_i}
   - При $k_i \geq k$ получаем $min\{k-1, k_i\} = k-1 \Rightarrow l$ пробегает все значения от 1 до $k \Rightarrow$ получим последние $k-1$ векторов из пространства L_{k_i}

   То есть, когда мы вычтем, то получим, что для пространств, где $k > k_i$ будет разность $k_i - k_i = 0$
Для пространств, где $k_i \geq k$ будет разность $k - (k-1) = 1$
Значит, это число действительно равно $N_{\geq k}$

3. Заметим, что все векторы вида $A^{k_i-l}x_i, 1 \leq l \leq min\{k, k_i\}$ лежат в ядре A^k (так как $k + k_i - l \geq k_i \Rightarrow A^k(A^{k_i-l})x_i = 0$, так как k_i - индекс нильпотентности A на x_i)

Кроме того, никакие другие векторы из базиса V не лежат в ядре A^k (так как при $k \geq k_i$ получаем, что $A^{k_i-l}x_i, 1 \leq l \leq min\{k, k_i\}$ - это все векторы из L_{k_i}, а при $k_i \geq k$ - если $k < l \leq k_i$, то $k + k_i - l < k + k_i - k = k_i \Rightarrow A^k(A^{k_i-l}x_i) \neq 0$)
При этом размерность образа A^k равна числу векторов базиса V, не лежащих в ядре. Покажем это:
Возьмем произвольный $x \in V$ и распишем его по базису:

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{k_1}(A^{k_1-1}x_1) + ... + \alpha_n(A^{k_s-1}x_s)$$

Тогда

$$A^k x = \alpha_{i_1}(A^k y_1) + ... + \alpha_{i_r}(A^k y_r)$$

Здесь $y_1, ..., y_r$ - все векторы из базиса V, кроме тех, что лежат в ядре A^k (так как те, что в ядре, занулятся), причем $y_1 = A^{m_{i_1}}x_{i_1}, ..., y_r = A^{m_{i_r}}x_{i_r}$ (так как все векторы из базиса V имеют такой вид) и $A^k y_j$ - тоже один из векторов базиса V $\forall 1 \leq j \leq r$ (так как y_j не в ядре $A^k \Rightarrow k + m_{i_j} < k_{i_j} \Rightarrow A^k y_j = A^{k+m_{i_j}}x_{i_j}$ - вектор из базиса V) $\Rightarrow imA^k = L(A^k y_1, ..., A^k y_r)$ и $y_1, ..., y_r$ - линейно независимые как подсистема базиса V
Тогда по теореме о ранге и дефекте получим, что $defA^k$ в точности равен числу векторов из базиса V, лежащих в ядре A^k, то есть векторов вида $A^{k_i-l}x_i, 1 \leq l \leq min\{k, k_i\} \Rightarrow N_{\geq k} = defA^k - defA^{k-1}$

4. В итоге получаем:

$$N_k = N_{\geq k} - N_{\geq k+1} = defA^k - defA^{k-1} - (defA^{k+1} - defA^k) =$$
$$= 2defA^k - defA^{k-1} - defA^{k+1}$$

■

Расстояния, нормы, скалярные произведения, полиэдры.

Задача 1:

Докажите, что функция $p(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$ задает расстояние в вещественном пространстве $\mathbb{R}$. Будет ли пространство полным?

Решение:
Проверим свойства нормы:

1. Симметричность - очевидна из симметричности модуля
$$|x - y|/(1 + |x - y|) = |y - x|/(1 + |y - x|)$$
2. Неотрицательность - очевидна из неотрицательности числителя и знаменателя $p(x, y) \geq 0$
3. Неравенство треугольника -
$$p(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x - y|} \leq \text{(неравенство треугольника для модуля)} \leq$$
$$\leq 1 - \frac{1}{1 + |x - z| + |z - y|} = \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} =$$
$$= \frac{|x - z|}{1 + |x - z| + |z - y|} + \frac{|z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} =$$
$$= p(x, z) + p(z, y)$$

■

Задача 2:

Докажите, что множество S замкнуто в метрическом пространстве M тогда и только тогда, когда дополнительное множество $M \backslash S$ открыто.

Решение:
Разобьем решение на два подпункта:

1. Покажем достаточность. S - замкнуто, что означает что оно содержит все свои предельные точки. Предположим, что $M \backslash S$ не является открытым, тогда $\exists x \in M \backslash S$, такая что в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из S (иначе x - внутренняя) $\Rightarrow x$ - предельная для S, но $x \notin S$ - противоречие с замкнутостью S.

2. Покажем необходимость. $M \backslash S$ - открыто, значит каждая точка этого мн-ва является внутренней. Предположим, что S не замкнуто, тогда $\exists x \in M \backslash S : x$ - предельная для $S \Rightarrow$ в любой окрестности x если точка из S и x не является внутренней - противоречие.

■

Задача 3:

Пусть точками метрического пространства M являются натуральные числа, а расстояние между m и n определяется как $\rho(m,n) = 1+min(1/m, 1/n)$ при $m \neq n$ и 0 при $m = n$. Докажите, что M - полное метрическое пространство. Докажите также, что замкнутые шары $\overline{M}(1, 1+1/2) \supset \overline{M}(1, 1+1/3) \supset \overline{M}(1, 1+1/4) \supset ...$ вложены, но имеют пустое пересечение.

Решение:
Разобьем решение на два подпункта:

1. Покажем достаточность. S - замкнуто, что означает что оно содержит все свои предельные точки. Предположим, что $M \backslash S$ не является открытым, тогда $\exists x \in M \backslash S$, такая что в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из S (иначе x - внутренняя) $\Rightarrow x$ - предельная для S, но $x \notin S$ - противоречие с замкнутостью S.

2. Покажем необходимость. $M \backslash S$ - открыто, значит каждая точка этого множ-ва является внутренней. Предположим, что S не замкнуто, тогда $\exists x \in M \backslash S : x$ - предельная для $S \Rightarrow$ в любой окрестности x если точка из S и x не является внутренней - противоречи.

■